Title: Sur l'equilibre asymptotique d'un systeme d'equations differentielles-fonctionelles a argument retarde

Author: Tadeusz Dłotko

PRACE MATEMATYCZNE I, 1969

TADEUSZ DŁOTKO

Sur l'équilibre asymptotique d'un système d'équations différentielles-fonctionnelles à argument retardé.

Envisageons un système mécanique décrit par une équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{où} \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad f = (f_1, \dots, f_n).$$

Si pour chaque $c \in E^n$ il existe une solution de ce système pour laquelle $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$ et si pour chaque solution $x(t)$ de ce système $\lim_{t\to\infty} x(t) = \text{const}$, on dit que ce système mécanique possède l'équilibre asymptotique.

Une telle situation a lieu pour l'équation scalaire $x'(t) = k(t)x(t)$ où $\int^{\infty} k(t)dt < \infty$.

Dans cette note j'indique des conditions garantissant l'existence non-locale des solutions de l'équation différentielle-fonctionnelle de la forme

(1) $$x'(t) = f(t, \phi(t, x)),$$

dans laquelle f et $\phi(t, x)$ sont des fonctions données et $x(t)$ est une fonction inconnue.

Ensuite je démontre des théorèmes garantissant que les solutions de (1) sont bornées et possèdent des asymptotes horizontales.

J'étends ces théorèmes aux systèmes linéaires perturbés par un élément non-linéaire à argument retardé. Comme conclusion on obtient une condition garantissant la stabilité des solutions d'un système à argument retardé.

Les théorèmes donnés généralisent entre autres quelques résultats antérieurs de R. CONTI [5], N. BOURBAKI [2], L. CESARI [4], U. DINI-HUKUHARA [8], T. KITAMURA [10], I. G. PETROWSKIJ [11], H. TEYAMA [12] et A. WINTNER [15].

Hypothèse 1. La fonction $f(t, x)$ est continue pour $(t, x) \in E^1_+ \times E^n$, $E^1_+ = \langle 0, \infty)$, et telle que

(2) $$|f(t, x)| \leqslant k(t)g(|x|) + l(t)$$

où $g(0) = 0$ et $g(x)$ est croissante pour $x > 0$.

Pour chaque $K > 0$ il existe une constante $M(K) > 0$ telle que $g(K|x|) \leqslant M(K)g(|x|)$ et $G(x) = \int_{0<x_0}^{x} \frac{1}{g(t)} dt \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Les fonctions $k(t)$ et $l(t)$ sont non-négatives et continues pour $t \in E^1_+$.

Le symbole $|x|$ désigne une norme arbitraire dans l'espace E^n. L'opération $\phi(t, x)$ à valeurs dans E^n est définie pour des systèmes de fonctions $(x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))$ localisés dans $\langle t-w, t\rangle$, $w=\text{const}\geqslant 0$, $t\geqslant 0$.

L'opération $\phi(t, x)$ transforme chaque famille de fonctions continues et bornées dans $\langle -w, \infty)$ en un ensemble de fonctions continues et bornées pour $t\geqslant 0$. De plus

$$(2') \qquad |\phi(t, x)-\phi(t, \bar{x})|\leqslant N \max_{\tau\in\langle -w,t\rangle} |x(\tau)-\bar{x}(\tau)| \quad \text{et} \quad \phi(t, 0)\equiv 0.$$

Remarque. La condition (2) et l'hypothèse sur la fonction g se trouve accomplie p.ex. pour la fonction $g(x)=kx+l$, $k, l\geqslant 0$, ainsi que quand la fonction $f(t, x)$ satisfait à la condition de Lipschitz

$$|f(t, x)-f(t, \bar{x})|\leqslant k(t)\,|x-\bar{x}| \quad \text{pour} \quad (t, x), (t, \bar{x})\in E^1_+\times E^n$$

et aussi pour $f(t, x)=k(t)x^\alpha+l(t)$, $k, l\geqslant 0$, $\alpha\in\langle 0, 1\rangle$.

La condition (2') est accomplie en particulier pour

$$\phi(t, x) = x(t-w),$$

$$\phi(t, x) = \int_{t-\omega}^{t} x(s)r(s)\,ds \quad \text{et} \quad \int_{t-\omega}^{t} |r(s)|\,ds\leqslant\text{const}, \quad t\geqslant 0,$$

$$\phi(t, x) = \int_{t-\omega}^{t} x(s)\,dr(t, s) \quad \text{et} \quad \int_{t-\omega}^{t} |r(t, s)|\,ds = K(t)\leqslant\text{const}<\infty.$$

Théorème 1. *Dans l'hypothèse* 1, *la fonction initiale* $\alpha(t)$, $t\in\langle -w, 0\rangle$, *étant donnée, toutes les solutions de l'équation* (1) *sont définies dans l'intervalle* $\langle 0, \infty)$.

Démonstration. Comme il résulte de [6], l'équation (1) possède une solution $x(t)$ dans $\langle 0, \beta)$ correspondant à la fonction initiale $\alpha(t)$, $t\in\langle -w, 0\rangle$. Il résulte du théorème de A. D. Mychkis ([19], page 115) qu'en prolongeant cette solution on peut obtenir l'une des deux possibilités:

a) il existe $\lim_{t\to\beta-0} x(t)$ et alors la solution peut être prolongée sur l'intervalle $\langle 0, \gamma\rangle$, $\gamma>\beta$, en conservant la classe de régularité;

b) $\limsup_{t\to\beta-0}|x(t)|=+\infty$ si $t\to\beta-0$. Dans ce cas il résulte de l'équation (1) et des conditions admises que $|x(t)|\leqslant|\alpha(0)|+\int_0^t k(\tau)g(|\phi(\tau, x)|)\,d\tau+\int_0^t l(\tau)\,d\tau$, $t\in\langle 0, \beta)$,

d'où pour $||x(t)||=\max_{-w\leqslant\tau\leqslant t}|x(\tau)|$ et $c=|\alpha(0)|+\int_0^\beta l(t)\,dt$ nous obtenons

$$||x(t)||\leqslant c+\int_0^t M(N)\max_{0\leqslant s\leqslant\tau} k(s)g(||x(\tau)||)\,d\tau \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0.$$

De cette inégalité et de l'inégalité de Bihari [1] on obtient

$$(3) \qquad ||x(t)||\leqslant G^{-1}(G(c)+M(N)[\max_{0\leqslant\tau\leqslant\beta} k(\tau)]\,t) \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0 \quad \text{et} \quad t<\beta.$$

Il s'ensuit que $||x(t)||$ est borné pour $t\in\langle 0, \beta)$, donc on ne peut pas avoir $\limsup|x(t)|=+\infty$ si $t\to\beta-0$.

THÉORÈME 2. *Admettons l'hypothèse* 1 *et de plus* $\int\limits^{\infty} k(t)dt<\infty$ *et* $\int\limits^{\infty} l(t)dt<\infty$. *Alors les solutions de l'équation* (1) *sont bornées pour* $t\geqslant 0$.

Démonstration. Du théorème précédent il résulte l'existence des solutions de l'équation (1), satisfaisant à la condition initiale $x(t)=\alpha(t)$ pour $t\in\langle -w, 0\rangle$. Cette solution existe pour $t\geqslant 0$ et

$$|x(t)|\leqslant d+\int\limits_0^t k(\tau)g(N\,||x(\tau)||)\,d\tau \qquad \text{pour} \qquad d=|\alpha(0)|+\int\limits^{\infty} l(t)\,dt,$$

d'où

$$||x(t)||\leqslant G^{-1}\Big(G(d)+M(N)\int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau\Big).$$

Il en résulte que $||x(t)||$ est bornée pour $t\geqslant 0$ puisque $G(x)\to+\infty$ lorsque $x\to+\infty$.

THÉORÈME 3. *Admettons l'hypothèse* 1 *et de plus que* $\int\limits^{\infty} k(t)dt<\infty$ *et* $\int\limits^{\infty} l(t)dt<\infty$ *Alors chaque solution* $x(t)$ *de* (1) *déterminée par la fonction initiale* $\alpha(t)$, $t\in\langle -w, 0\rangle$ *possède une asymptote horizontale pour* $t\to+\infty$.

Si le problème de Cauchy pour l'équation* (1) *possède plusieurs solutions, leurs asymptotes peuvent être différentes.

Démonstration. La solution $x(t)$ étant bornée, l'intégrale

$$\int\limits_0^{\infty} |x'(t)|\,dt=\int\limits_0^{\infty} |f(t,\phi(t,x))|\,dt$$

est finie; il en est donc de même de l'intégrale

$$\int\limits_0^{\infty} x'(t)\,dt,$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=x(0)+\int\limits_0^{\infty} x'(t)\,dt.$$

Corollaire. Si la fonction f satisfait à la condition de Lipschitz, on peut appliquer le théorème 3 pourvu qu'il existe un point $\bar{x}\in E^n$ tel que $\int\limits^{\infty} |f(t,\bar{x})|\,dt<\infty$.

On connait bien le théorème: Si $\int\limits^{\infty} |A(t)|\,dt<+\infty$, alors les solutions de l'équation linéaire

$$x'(t)=A(t)x(t) \tag{4}$$

possèdent des asymptotes horizontales pour $t\to\infty$.

Définition. Soit $x(t)$ une solution de (4) dans $\langle 0,\infty)$. Nous l'appelons *uniformément stable* dans $\langle 0,\infty)$ si $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0}\ \bigvee\limits_{\delta(\varepsilon)>0}\ \bigwedge\limits_{t_0\geqslant 0}\ \bigwedge\limits_{\bar{x}(t)}$ ($\bar{x}(t)$ satisfait (4) pour $t\geqslant t_0$ et $|x(t_0)-\bar{x}(t_0)|<\delta(\varepsilon)|\Rightarrow|x(t)-\bar{x}(t)|<\varepsilon$ pour $t\geqslant t_0$).

THÉORÈME 4. *Admettons que toutes les solutions du système* (4) *sont uniformément stables dans* $\langle 0,\infty)$. *Désignons par* $y(t)$ *cette solution du système* (4) *pour laquelle* $y(0)=\alpha(0)$.

Si les fonctions $f(t, x)$ et $\phi(t, x)$ satisfont à l'hypothèse 1 *et si* $\int^{\infty} k(t)dt<\infty$, $\int^{\infty} l(t)dt<\infty$, *alors chaque solution $x(t)$ du système*

$$x'(t) = A(t)x(t)+f(t, \phi(t, x)) \tag{5}$$

determinée par la fonction initiale $\alpha(t)$, $t \in \langle -w, 0\rangle$, qui existe dans tout l'intervalle $\langle 0, \infty)$, est borneée dans cet intervalle et $\lim|x(t)-y(t)|=c=\text{const}$ *pour* $t\to+\infty$ *).

Démonstration. On a

$$x(t) = y(t)+ \int_0^t Y(t)\, Y^{-1}(\tau)f(\tau, \phi(\tau, x))\, d\tau \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0, \tag{6}$$

où $Y(t)$ désigne le système fondamental de solutions de (4) tel que $Y(0)=E$. D'une condition suffisante et nécessaire pour la stabilité uniforme dans $\langle 0, \infty)$ (voir [4]) nous obtenons

$$|Y(t)\, Y^{-1}(\tau)|\leqslant M_1 = \text{const} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant\tau\leqslant t.$$

De l'égalité (6) on a

$$|x(t)|\leqslant|y(t)|+M_1\int_0^t |f(\tau, \phi(\tau, x))|\, d\tau\leqslant c_1+M_1\int_0^t k(\tau)\, g(|\phi(\tau, x)|)\, d\tau,$$

où

$$c = \sup_{t\geqslant 0}|y(t)|+M_1\int_0^{\infty} l(t)\, dt.$$

Des hypothèses admises il résulte que

$$\|x(t)\|\leqslant c_1+M_1\int_0^t k(\tau)\, g(\|x(\tau)\|)\, d\tau, \quad \text{où} \quad c_1 = c+|\alpha(0)|.$$

De l'inégalité de Bihari [1] nous obtenons

$$\|x(t)\|\leqslant G^{-1}\Big(G(c)+M_1\int_0^{\infty} k(\tau)\, d\tau\Big).$$

d'où $|x(t)|\leqslant R$ pour $t\geqslant 0$. Encore de (6) il résulte que

$$|x(t)-y(t)|\leqslant\int_0^t |Y(t)\, Y^{-1}(\tau)|\, [k(\tau)\, g(|\phi(\tau, x)|)]\, d\tau+\int_0^t l(\tau)\, d\tau\leqslant$$

$$\leqslant M_1\int_0^t [MC\, k(\tau)+l(\tau)]\, d\tau<+\infty \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0, \quad C = \max_{|u|\leqslant RM} g(u).$$

---

*) On peut examiner le problème d'existence non-locale des solutions de l'équation dernière, p.ex. en basant sur le théorème 1 de cette note. Il suffit d'admettre que

$$\int_{0<x_0}^{\infty} \frac{1}{g(u)+u}\, du = +\infty .$$

En particulier, quand $0\leqslant g(x)\leqslant x$, chaque solution du système 5 existe dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$.

Comme dans la démonstration du théorème 3 nous obtenons que

$$\lim |x(t)-y(t)| = \text{const} \quad \text{pour} \quad t\to+\infty .$$

Remarque. Dans les hypothèses admises $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)-y(t)|$ peut ne pas être unique. P.ex., pour l'équation différentielle

$$x'(t) = 0x(t)+\frac{2}{t^2+1}\sqrt{|x|}$$

le problème initial $x(0)=0$ possède des solutions

$$x_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad t\in\langle 0, c\rangle, \ c\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ (\operatorname{arctg} t-\operatorname{arctg} c)^2 & \text{pour} \quad t\geqslant c \end{cases}$$

et

$$\lim_{t\to\infty} |x_c(t)-y(t)| = \left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} c\right)^2 .$$

Corollaire. On peut appliquer le dernier théorème à l'équation

$$x' = -x+\frac{2}{t^2+1}\sqrt{|x|+1} .$$

Remarquons que l'on ne peut pas appliquer à cette équation ni les généralisations des théorèmes de Dini-Hukuhara ([4], p. 95), ni le théorème de R. Bellman ([4], p. (103 où l'on exige que

$$|f(t, x)|\leqslant k(t)|x| .$$

Corollaire. Si les solutions du système linéaire (4) possèdent des asymptotes horizontales pour $t\to+\infty$, les solutions du système non-linéaire (5) possèdent aussi des asymptotes horizontales.

Il faut y admettre pour f et ϕ les hypothèses antérieures.

THEOREME 5. *Examinons les systèmes* (4) *et* (5) *et admettons qu'ils possèdent des solutions satisfaisant aux conditions initiales* $y(0)=y_0$, $x(t)=\alpha(t)$ *pour* $t\in\langle -w, 0\rangle$, $y(0)=\alpha(0)$, *bornées pour* $t\geqslant 0$.

Admettons de plus que les fonctions f *et* ϕ *satisfassent à l'hypothèse* 1 *et que si* $|x|\leqslant c$, *alors* $|f(t, x)|\leqslant N(t, c)$ *et* $\int\limits^{\infty} N(t, c)\,dt<\infty$.

Dans ces hypothèses

$$\lim |y(t)-x(t)| = \text{const} \quad \textit{pour} \quad t\to+\infty .$$

Démonstration. Les solutions $x(t)$ et $y(t)$ de la thèse du théorème satisfont à l'égalité

$$x(t) = y(t)+\int_0^t Y(t)\,Y^{-1}(\tau)f(\tau, \phi(\tau, x))\,d\tau \quad \text{pour} \quad t\geqslant 0,$$

d'où

$$|x(t)-y(t)|\leqslant M\int_0^t |f(\tau,\phi(\tau,x))|\,d\tau.$$

Du fait, que $x(t)$ est bornée il résulte que $|\phi(t,x)|\leqslant C$ est aussi bornée pour $t\geqslant 0$, c.à.d., que $|f(t,\phi(t,x))|\leqslant N(t,C)$ et $\int^{\infty} N(t,C)dt<+\infty$. Cela signifie que la différence $|x(t)-y(t)|$ est bornée pour $t\geqslant 0$. Identiquement comme dans le theéorème précédent on peut montrer que $\lim|x(t)-y(t)|=\text{const}$ pour $t\to+\infty$.

Corollaire. Si l'un des systèmes (4) ou (5) possède des solutions tendant aux asymptotes horizontales quand $t\to+\infty$, alors l'autre système possède aussi des solutions tendant aux asymptotes horizontales pour $t\to+\infty$.

TRAVAUX CITÉS

[1] I. Bihari: *A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7, 71—94, 1956.

[2] N. Bourbaki: *Eléments de Mathématiques, Fonctions d'une variable réelle*, Paris, Hermann et Cie.

[3] F. Brauer: *Nonlinear differential equations with forcing terms*, Proc. Amer. Math. Soc., 1964, 15, nr. 5, 758—675.

[4] L. Cesari: *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin, 1959.

[5] R. Conti: *Sulla stabilità dei sistemi di equazioni diferenziali lineari*, Riv. Mat. Univ. Parma, 6, 3—35, 1955.

[6] T. Dłotko: *O pewnym równaniu różniczkowym z opóźniającym się argumentem*, Zeszyty Nauk. WSP w Katowicach, nr 4, 1964, 63—72.

[7] T. Dłotko: *O nieliniowej asymptotycznej równowadze*, ibidem, nr 6, 1967, 75—82.

[8] M. Hukuhara: *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, J. Fac. Sci. Univ. Hokkaido, (1) Math. 2, 13—81, 1934—1936.

[9] E. Kamke: *Differentialgleichungen*, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1962.

[10] T. Kitamura: *Some inequalities on a system of solutions of linear simultaneous differential equations*, Tohoku Math. J. 49, 308—311, 1943.

[11] I. G. Pietrowskij: *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa, 1964.

[12] H. Teyama: *Some inequalities in the theory of linear differential equations*, Tohoku Math. J. 47, 210—216, 1940.

[13] L. Tonelli: *Sulla unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaire*, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 6, I, 1925, 272—277.

[14] W. J. Trijtzinsky: *Theory of linear differential equations containing a parameter*, Acta Math., 67, 1—50, 1936.

[15] A. Wintner: *Asymptotic equilibria*, Amer. J. Math. 68, 125—132, 1946.

[16] A. Wintner: *The nonlocal existence problem of ordinary differential equations*, ibidem, 67, 277—284, 1945.

[17] A. Wintner: *An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria*, ibidem, 68, 451—453, 1946.

[18] A. Wintner: *On linear asymptotic equilibria*, ibidem, 71, 853—858, 1949.

[19] A. D. Mychkis: *Общая теория дифференциальных уравнений з запаздывающим аргументом*, *У.М.Н.*, 33, (1949), 99—141.

Tadeusz Dłotko

O RÓWNOWADZE ASYMPTOTYCZNEJ UKŁADU RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWO-FUNKCYJNYCH Z OPÓŹNIONYM ARGUMENTEM

Streszczenie

W pracy omawia się równania różniczkowo-funkcjonałowe postaci

$$x'(t) = f(t, \Phi(t, x)),$$

które w szczególności obejmują równania różniczkowe z opóźniającym się argumentem. Przy odpowiednich założeniach dowodzi się twierdzeń o nielokalnym istnieniu rozwiązań, podaje ich oszacowanie oraz bada występowanie asymptot poziomych. Dowodzi się stabilności pewnych układów liniowych sperturbowanych częścią nieliniową zawierającą opóźniony argument. Uogólnia się pewne wyniki autorów cytowanych we wstępie do tej pracy.

Oddano do Redakcji 1 sierpnia 1969 r.